Calcul d'aires et temps d'attente

1 Variable aléatoire à densité

En première et en début de terminale, nous avons étudié des variables aléatoires qui prennent un nombre fini de valeurs : ce sont des variables aléatoires discrètes.
Nous avons notamment travaillé avec des variables aléatoires suivant des lois caractéristiques : la loi uniforme discrète, la loi de Bernoulli, la loi binomiale.

Dans les activités préparatoires, nous avons rencontré des variables aléatoires qui prennent toutes les valeurs d'un intervalle réel : l'intervalle $[0; 12]$ pour le point mobile sur le triangle, l'intervalle $[0; 1]$ pour le temps d'attente du premier arrivé au café et $[0; +\infty[$ pour le volcan Aso).

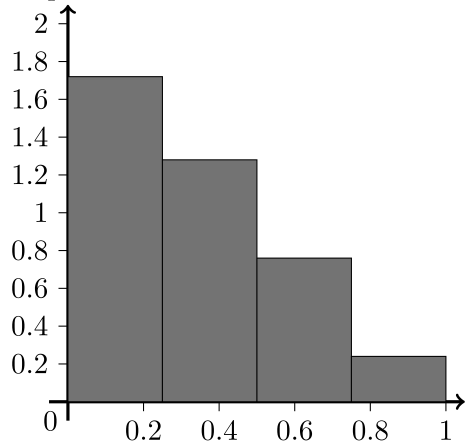
Ces variables aléatoires sont dites continues. Elles sont à valeurs dans un intervalle de $\mathbb{R}$.

Pour étudier une variable aléatoire continue X liée à une expérience aléatoire, nous pouvons répéter cette expérience n fois et alors construire l'histogramme des fréquences.
Dans certains cas, on peut avoir recours à la simulation informatique pour constituer des échantillons de grande taille de réalisation de X.
Dans des échantillons de très grandes tailles, on peut trouver une amplitude des classes pour laquelle les histogrammes des différents échantillons ont une allure semblable. On peut alors trouver une même courbe lissant l'ensemble de ces histogrammes, on l'a appelée dans les activités « courbe de tendance ». Elle est indépendante des échantillons et ne dépend que de la variable aléatoire continue X.

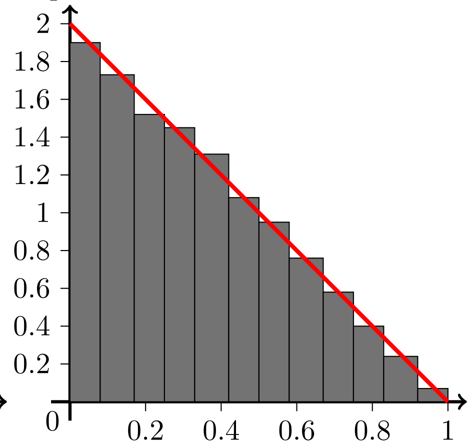
Exemples d'histogrammes obtenus dans l'étude du rendez vous au café

Échantillon 1 :

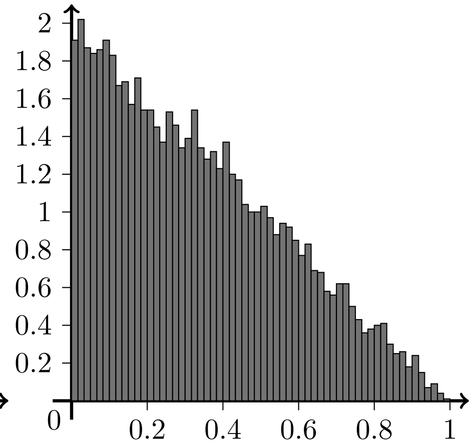
Amplitude 15 min



Amplitude 5 min

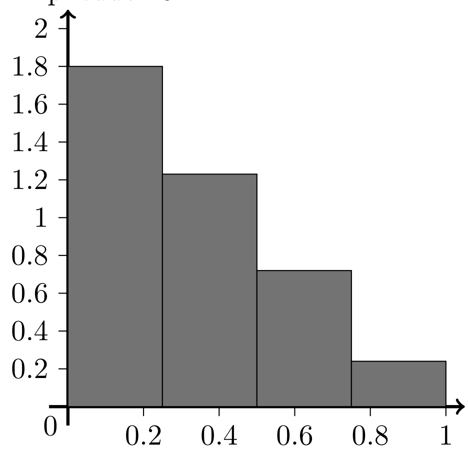


Amplitude 1 min

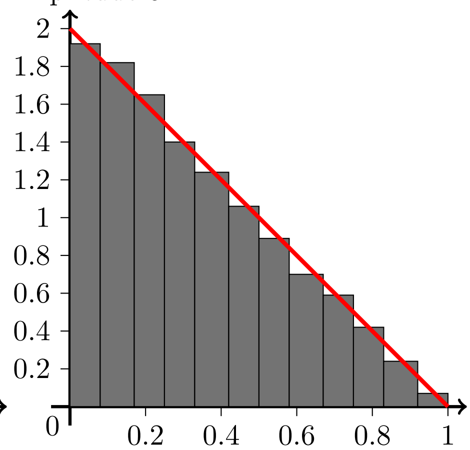


Échantillon 2 :

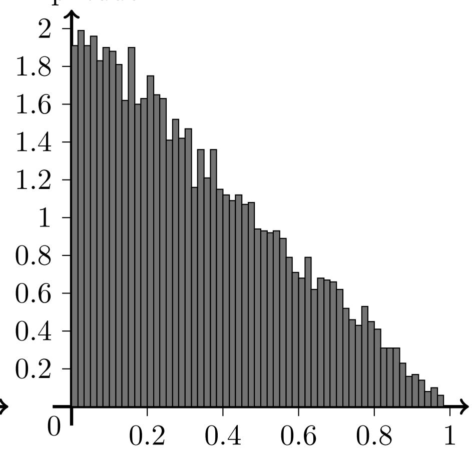
Amplitude 15 min



Amplitude 5 min



Amplitude 1 min



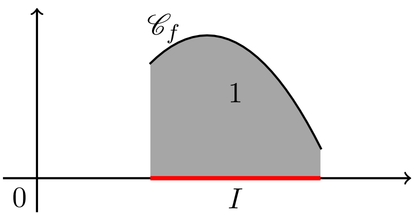
L'aire sous la « courbe de tendance » doit être égale à la somme des aires des rectangles, c'est-à-dire à la somme des fréquences représentées ; **l'aire sous la « courbe de tendance » est donc égale à 1**.

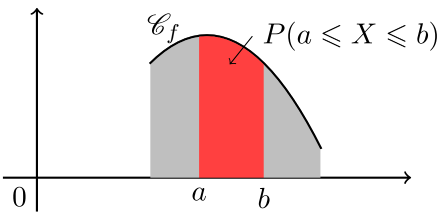
Dans un histogramme de fréquence, la hauteur des rectangles est proportionnelle à la densité (de fréquence) ; c'est pourquoi on préférera l'expression courbe de densité représentant une fonction f appelée fonction de densité de X.
Connaître f permet de connaître X c'est-à-dire permet de calculer la probabilité que X prenne ses valeurs dans un intervalle donné.

Exemple 1.

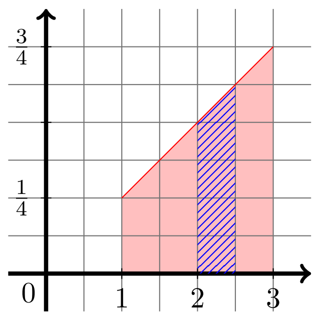
- Pour le point mobile sur le triangle rectangle, la distance parcourue par le mobile jusqu'à son arrêt est modélisée par une variable aléatoire.
  Cette variable aléatoire a pour fonction de densité la fonction f définie sur ...... par $f(x) =$ ......
- Pour la rencontre au café, le temps d'attente du premier arrivé est modélisé par une variable aléatoire.
  Cette variable aléatoire a pour fonction de densité la fonction f définie sur ...... par $f(x) =$ ......
- Pour le volcan Aso, le temps écoulé entre deux éruptions successives est modélisé par une variable aléatoire.
  Cette variable aléatoire a pour fonction de densité la fonction f définie sur ...... par
  $f(x) =$ ......

Pour décrire la loi de probabilité d'une variable aléatoire continue X à valeurs dans un intervalle I, on lui associe une fonction f définie, positive et continue sur I telle que l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ sur I soit égale à 1.
Cette fonction est appelée fonction de densité de probabilité associée à la variable aléatoire X.
On dit que la variable aléatoire continue X a pour fonction de densité la fonction f si, et seulement si, pour tout intervalle $[a;b]$ inclus dans I, la probabilité que X prenne les valeurs de $[a;b]$ soit égale à l'aire sous $\mathscr{C}_f$ entre a et b.





Exemple 2.



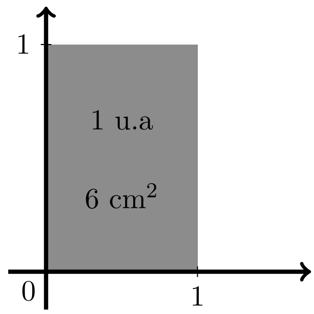
On considère X une variable aléatoire de fonction de densité f sur $[1;3]$.
f est continue et positive sur $I = [1;3]$ et nulle en dehors.
L'aire totale sous la courbe vaut : $\dfrac{\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)\times 2}{2} = 1$
$P(X \in [2;2,5])$ est l'aire de la surface hachurée.
$$P(X \in [2;2,5]) = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\right)\times \frac{1}{2}}{2} = \frac{9}{32}$$

Pour calculer ces probabilités, on a besoin de savoir calculer l'aire sous la courbe d'une fonction positive et continue sur un intervalle.

- Dans le cas du point mobile et de la rencontre au café, les aires à calculer sont celles de figures polygonales élémentaires (triangle, rectangle, trapèze) et on sait calculer leurs aires.
- Dans le cas du volcan, on ne reconnait pas de figures planes élémentaires. Nous devons donc apprendre à calculer l'aire sous une courbe quelconque.

2 Intégrale d'une fonction continue positive

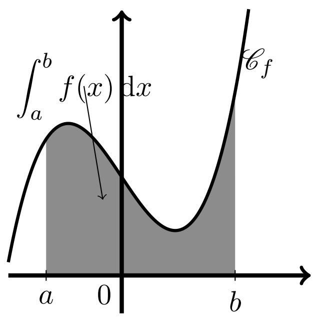
Définition 1. *Unité d'aire*



Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; I; J)$. On appelle unité d'aire, et on note u.a, l'aire du rectangle $OIKJ$ où K est le point de coordonnées $(1; 1)$. Si $(O; I; J)$ est un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm en abscisses et 3 cm en ordonnées alors l'unité d'aire est égal à 6 cm^2 .
On écrit 1 u.a= 6 cm^2.

2.1 Définition

Définition 2. *Intégrale de a à b de f*



On considère une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.
L'aire (en unité d'aire) de la partie du plan délimitée par les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f est appelée intégrale de a à b de la fonction f.
Cette aire est notée

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque 1. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se lit somme ou intégrale de a à b de $f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque 2. a et b sont les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque 3. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ne dépend que de f et de $[a; b]$: x est une variable muette.

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$

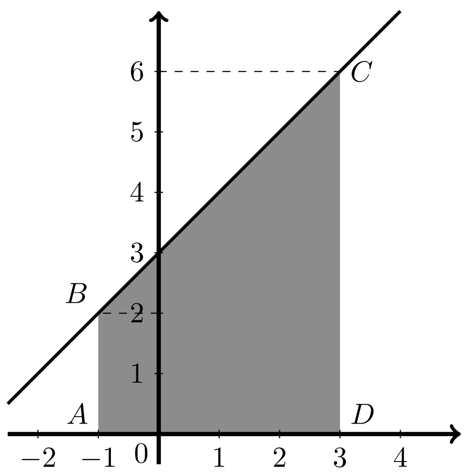
Remarque 4. On désigne aussi ce domaine comme l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.

Exemple 3.

Représentons le domaine associé à $\int_{-1}^3 x + 3\,\mathrm{d}x$ puis calculons cette intégrale :

On trace la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto x + 3$

$\int_{-1}^3 x + 3\,\mathrm{d}x = \mathscr{A}_{ABCD} = \dfrac{(2 + 6) \times 4}{2} = \dfrac{8 \times 4}{2} = 16$



Une vidéo présentant comment calculer une intégrale avec la calculatrice afin de vérifier ses calculs
Vous pouvez également calculer l'intégrale avec la touche spécialement dédiée (sans passer par la représentation graphique)

Exemple 4. On considère une variable aléatoire continue sur un intervalle I ayant pour fonction de densité la fonction f.

On a pour tous réels a et b de I,

$$P(X \in [a;b]) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemple 5. On considère deux réels a et b tels que $a < b$.
Déterminons le réel k pour que la fonction $f : x \mapsto k$ soit une fonction de densité de probabilité sur $[a;b]$.

Pour que f soit une fonction de densité sur $[a;b]$, f doit

- être continue sur $[a;b]$ $\rightsquigarrow$ pour tout réel k, $f : x \mapsto k$ est continue
- être positive sur $[a;b]$ $\rightsquigarrow$ pour tout réel $k \geqslant 0$, $f : x \mapsto k$ est positive
- avoir une aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ sur $[a;b]$ égale à 1, cela signifie que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
  $\rightsquigarrow$ $\displaystyle\int_a^b k\,\mathrm{d}x$ est l'aire d'un rectangle de hauteur k et de base $b-a$ donc $\displaystyle\int_a^b k\,\mathrm{d}x = k \times (b-a)$ on doit donc avoir $k \times (b-a) = 1 \Leftrightarrow k = \dfrac{1}{b-a}$

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{b-a}$ est une fonction de densité sur $[a;b]$.

2.2 Propriétés de l'intégrale

On considère une fonction f continue et positive sur l'intervalle $[a;b]$.

Les propriétés suivantes se déduisent de la définition d'une intégrale à l'aide d'aire.

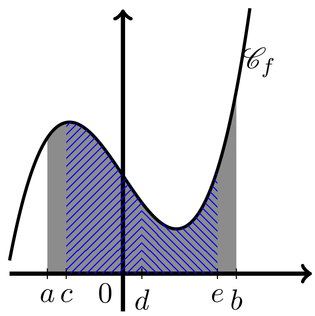
Proposition 1. *Positivité*
Pour tous réels c et d de I : $\displaystyle\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$ est un réel positif.

Proposition 2.
Pour tout réel c de I, $\displaystyle\int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

Proposition 3. *Relation de Chasles*

Pour tous réels c, d et e tels que $a \leqslant c \leqslant d \leqslant e \leqslant b$:

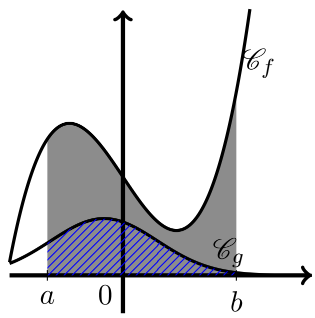
$$\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^e f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^e f(x)\,\mathrm{d}x$$



Proposition 4. *Conservation de l'ordre*

Si pour tout réel $x \in [a;b]$, $0 \leqslant g(x) \leqslant f(x)$ alors

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



Appliquons les propriétés de l'intégrale à une variable aléatoire continue.

Exemple 6. Soit X une variable aléatoire continue sur un intervalle I.

- Pour tout intervalle J inclus dans I, $0 \leqslant P(X \in J) \leqslant 1$
- Pour tout $c \in I$, $P(X = c) = 0$
- Pour tout $c \in I$, $P(X \leqslant c) = P(X < c)$
- Pour tous c, d, e de I tels que $c \leqslant d \leqslant e$, $P(c \leqslant X \leqslant e) = P(c \leqslant X \leqslant d) + P(d \leqslant X \leqslant e)$
- Pour tout $c \in I$, $P(X > c) = 1 - P(X \leqslant c)$
- Pour tous c, d de I tels que $c < d$, $P(c \leqslant X < d) = P(X < d) - P(X < c)$

Démonstration. Soit f la fonction de densité associé à la variable aléatoire X. On note a et b les bornes de l'intervalle I.

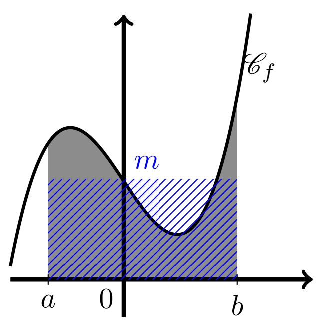
- On considère un intervalle J inclus dans I. Notons c et d les bornes de J.
  $P(X \in J) = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ par positivité.
  On a $\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1$ donc $\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1$
  Ainsi $0 \leqslant P(X \in J) \leqslant 1$
- Pour tout $c \in I$, $P(X = c) = \int_c^c f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- Pour tout $c \in I$, $P(X \leqslant c) = P(X < c) + P(X = c) = P(X < c)$
- Pour tous c, d, e de I tels que $c \leqslant d \leqslant e$,
  $P(c \leqslant X \leqslant e) = \int_c^e f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^e f(x)\,\mathrm{d}x = P(c \leqslant X \leqslant d) + P(d \leqslant X \leqslant e)$
- Pour tout $c \in I$, $P(X \leqslant c) + P(X > c) = P(X \in I) = 1$ donc $P(X > c) = 1 - P(X \leqslant c)$
- Pour tous c, d de I tels que $c < d$, $P(X < c) + P(c \leqslant X < d) = P(X < d)$ donc $P(c \leqslant X < d) = P(X < d) - P(X < c)$

□

2.3 Valeur moyenne

On considère une fonction f continue et positive sur l'intervalle $[a; b]$.

Définition 3. *Valeur moyenne*
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.
La valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est le réel $m = \dfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$



Sur la figure ci-contre l'aire du rectangle est égale à l'aire sous la courbe :

$$m \times (b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

2.4 Théorème fondamental

Proposition 5. *Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$.*

*Si f est **continue** et **positive** sur $[a;b]$ alors, la fonction F définie sur $[a;b]$ par :*
$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et sa dérivée est f.

C'est à dire que pour tout $x \in [a;b]$, $F'(x) = f(x)$ ainsi F est une primitive de f.

Remarque 5. On a $F(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc F est la primitive de f qui s'annule en a.

Exemple 7. On souhaite calculer $\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t$.
On considère la fonction A définie pour $x \geqslant 0$ par $A(x) = \int_0^x t^2\,\mathrm{d}t$.
A est telle que $A'(x) = x^2$ et $A(0) = 0$.
Par lecture du tableau des primitives on sait que $A(x) = \frac{1}{3}x^3 + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Or $A(0) = 0$ donc $k = 0$, ainsi $A(x) = \frac{1}{3}x^3$.
$\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = A(1) = \frac{1}{3}$

Exemple 8. Dans le problème du volcan Aso, on devait calculer $P(0 \leqslant X \leqslant 20)$ avec X une variable aléatoire de fonction de densité $x \mapsto 0,2e^{-0,2x}$.
Ainsi $P(0 \leqslant X \leqslant 20) = \int_0^{20} 0,2e^{-0,2t}\,\mathrm{d}t$.
On considère la fonction A définie pour $x \geqslant 0$ par $A(x) = \int_0^x 0,2e^{-0,2t}\,\mathrm{d}t$.
A est telle que $A'(x) = 0,2e^{-0,2x}$ et $A(0) = 0$.
Par lecture du tableau des primitives on sait que $A(x) = -e^{-0,2x} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.
Or $A(0) = 0$ donc $k = 1$, ainsi $A(x) = -e^{-0,2x} + 1$.
$P(0 \leqslant X \leqslant 20) = \int_0^{20} 0,2e^{-0,2t}\,\mathrm{d}t = A(20) = -e^{-0,2\times 20} + 1 = 1 - e^{-4} \simeq 0,98$

2.5 Calcul d'intégrales

Proposition 6. *Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.*
Si F est une primitive de f sur $[a;b]$ alors, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$
On note $\int_a^b f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$

Démonstration. On sait que la fonction G définie sur $[a;b]$ par $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f.

On a $G(b) = \int_a^b f(t)\,dt$ et $G(a) = \int_a^a f(t)\,dt$ ainsi $G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\,dt$.
Si F est une primitive de f sur $[a;b]$ alors il existe un réel k tel que sur $[a;b]$ $F(x) = G(x) + k$ ainsi $F(b) - F(a) = G(b) + k - (G(a) + k) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\,dt$. $\square$

Exemple 9. $\int_{-1}^3 x+3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-1}^3 = \left(\frac{3^2}{2} + 3\times 3\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 3\times(-1)\right) = \frac{9}{2}+9-\frac{1}{2}+3 = \frac{8}{2}+12 = 16$

Exemple 10. $\int_0^2 e^x+2x-1\,\mathrm{d}x = \Big[e^x+x^2-x\Big]_0^2 = \Big(e^2+4-2\Big) - \Big(e^0+0-0\Big) = e^2+2-1 = e^2+1 \simeq 8,389$

3 Lois à densité

3.1 Généralités

On considère une variable aléatoire continue X définie sur un intervalle I.

Cela signifie que X prend **toutes** les valeurs de l'intervalle I.

La loi de probabilité de X est définie par la fonction de densité f définie sur I.

La fonction f définie sur l'intervalle I est une fonction de densité si

- elle est positive et continue sur I
- l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ sur I est égale à 1.

Si la variable aléatoire continue X a pour fonction de densité la fonction f alors pour tout intervalle $[a;b]$ inclus dans I, la probabilité que X prenne les valeurs de $[a;b]$ soit égale à l'aire sous $\mathscr{C}_f$ entre a et b soit

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

On a vu dans l'exemple 6 les propriétés suivantes :

Proposition 7. *Soit X une variable aléatoire continue sur un intervalle I.*

- *Pour tout intervalle J inclus dans I,* $0 \leqslant P(X \in J) \leqslant 1$
- *Pour tout $c \in I$,* $P(X = c) = 0$
- *Pour tout $c \in I$,* $P(X \leqslant c) = P(X < c)$
- *Pour tous c, d, e de I tels que $c \leqslant d \leqslant e$,* $P(c \leqslant X \leqslant e) = P(c \leqslant X \leqslant d) + P(d \leqslant X \leqslant e)$
- *Pour tout $c \in I$,* $P(X > c) = 1 - P(X \leqslant c)$
- *Pour tous c, d de I tels que $c < d$,* $P(c \leqslant X < d) = P(X < d) - P(X < c)$

Exemple 11. La production quotidienne d'un produit en tonnes est une variable aléatoire continue dont la fonction de densité est la fonction f définie sur $[0;10]$ par $f(x) = 0,006(10x - x^2)$.

1. Vérifions que f est une fonction de densité .

   f est une fonction polynôme donc f *est continue sur* $[0;10]$.

   Pour tout $x \in [0;10]$, $f(x) = 0,006 \times x \times (10 - x)$.
   $x \in [0;10]$ donc $x \geqslant 0$ et $10 - x \geqslant 0$ ainsi $f(x) \geqslant 0$.
   f *est positive sur* $[0;10]$.
   $\displaystyle\int_0^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} 0,006(10x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[0,006(5x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{10} = \left(0,006(500 - \frac{1000}{3}\right) - 0 = 3 - 2 = 1$
   f satisfait aux 3 conditions, c'est une fonction de densité.

2. Calculons $P(X \leqslant 7)$.

   $\displaystyle P(X \leqslant 7) = \int_0^7 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^7 0,006(10x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[0,006(5x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^7 = \left(0,006(245 - \frac{343}{3}\right) - 0 =$
   $1,47 - 0,686 = 0,784$

3. Déterminons la probabilité de l'événement « la production quotidienne dépasse 7 tonnes ».

   Cette probabilité est $P(X > 7)$.
   $P(X > 7) = 1 - P(X \leqslant 7) = 1 - 0,784 = 0,216$

Définition 4. *Fonction de répartition*
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de fonction de densité f sur l'intervalle I.

On appelle fonction de répartition de la variable X, la fonction F définie sur l'intervalle I par

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

Remarque 6. Soit a la borne inférieure de l'intervalle I ($a \in \mathbb{R}$).
Alors pour tout réel $x \in I$: $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
la fonction de répartition F est donc la primitive de f qui s'annule en a de la fonction de densité de probabilité f.

Définition 5. *Espérance et variance*
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de fonction densité f sur l'intervalle $[a;b]$.

- L'espérance mathématique de X est le nombre réel :

$$E(X) = \int_a^b t f(t)\,\mathrm{d}t$$

- La variance de X est le nombre réel :

$$V(X) = \int_a^b (t - E(X))^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 7. La variance peut se calculer à l'aide de la formule :

$$V(X) = \int_a^b t^2 f(t)\,\mathrm{d}t - (E(X))^2$$

Remarque 8. L'écart type de la variable aléatoire X est donnée par :

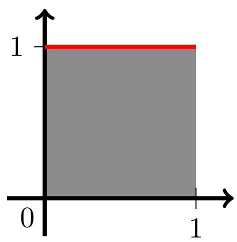
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

3.2 La loi uniforme continue sur $[0;1]$

On considère une variable aléatoire donnant un nombre réel choisi au hasard dans l'intervalle $[0;1]$.

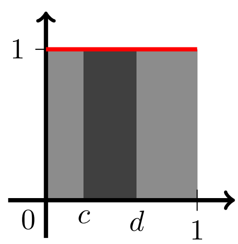
Définition 6. *Loi uniforme continue sur* $[0;1]$

On dit qu'une variable aléatoire X dont la fonction de densité f est la fonction constante égale à 1 pour tout x de $[0;1]$, suit la loi uniforme continue sur $[0;1]$.



Proposition 8.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0;1]$ alors pour tous réels c et d de $[0;1]$ on a $P(c \leqslant X \leqslant d) = d - c$



Exemple 12. Dans un cabinet médical, on a établi, après étude statistique, que le temps d'attente était complètement aléatoire et variait de façon uniforme jusqu'à 1 heure maximum.

On appelle X la variable aléatoire qui correspond au temps d'attente, ainsi X suit la loi uniforme continue sur $[0; 1]$.

La probabilité qu'un patient attende plus d'un quart d'heure est égale à $P\left(\frac{1}{4} \leqslant X \leqslant 1\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

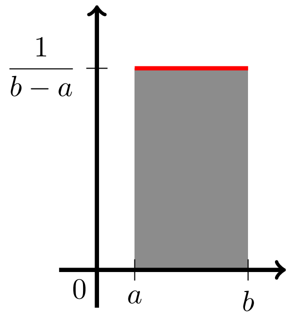
un patient a donc $\frac{3}{4}$ ou 75% de chances d'attendre plus d'un quart d'heure.

3.3 La loi uniforme continue sur $[a; b]$

On considère une variable aléatoire donnant un nombre réel choisi au hasard dans l'intervalle $[a; b]$.

Définition 7. *Loi uniforme continue sur* $[a; b]$

On dit qu'une variable aléatoire X dont la fonction de densité f est la fonction constante égale à $\frac{1}{b-a}$ pour tout x de $[a; b]$, suit la loi uniforme continue sur $[a; b]$.

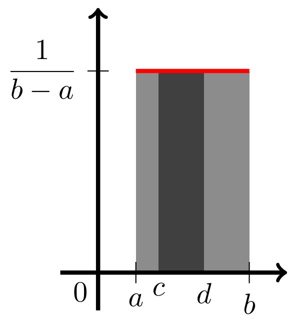


Remarque 9. Cette fonction de densité à été vue dans l'exemple 5.

Proposition 9. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme continue sur $[a; b]$.*
La fonction de répartition de X est la fonction définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$

Proposition 10.

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a; b]$ alors pour tous réels c et d de $[a; b]$ on a $P(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}$



Remarque 10. Le domaine compris entre les droites verticales d'équation $x = c$ et $x = d$ est un rectangle de largeur $d - c$ et de hauteur $\frac{1}{b-a}$ sont aire est donc $\frac{d-c}{b-a}$.

Proposition 11. *Espérance et variance d'une loi uniforme continue sur* $[a; b]$
Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a; b]$.

- *L'espérance mathématique de X est le nombre réel :*

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

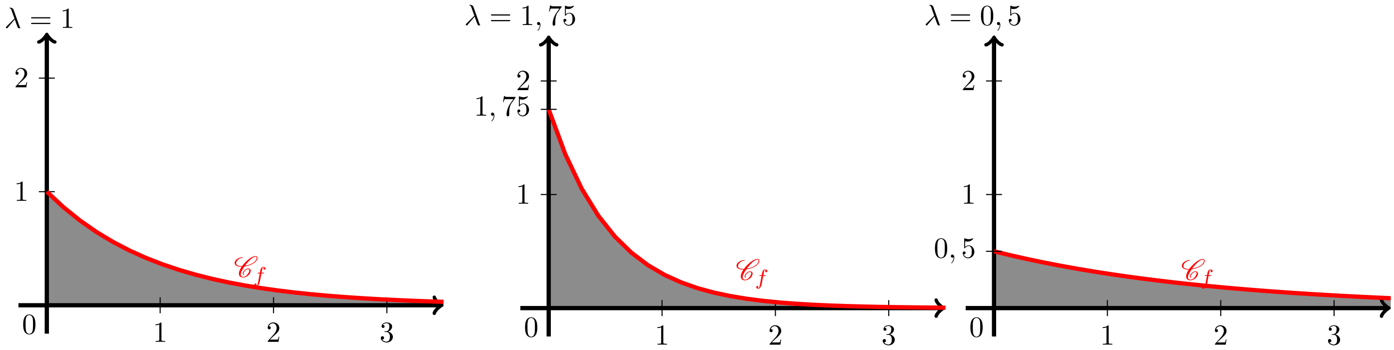
- *La variance de X est le nombre réel :*

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

3.4 La loi exponentielle

Dans l'ensemble de cette partie on considérera λ un nombre réel strictement positif.

Définition 8. *La loi exponentielle*
On dit que la variable aléatoire X dont la fonction de densité f est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ suit la loi exponentielle de paramètre λ sur $[0;+\infty[$.



Vous pouvez observer différentes courbes sur le fichier geogebra.

Remarque 11. On a $f(0) = \lambda$.

Remarque 12. L'aire sous la courbe de la fonction f est égale à $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^b \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \Big[-e^{-\lambda x}\Big]_0^b = -e^{-\lambda b} + e^0 = 1 - e^{-\lambda b}$$

Or $\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-\lambda b} = 0$ donc $\lim\limits_{b\to+\infty} 1 - e^{-\lambda b} = 1$ ainsi $\lim\limits_{b\to+\infty} \int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Proposition 12. *Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.*

La fonction de répartition de X est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$

Remarque 13. On en déduit que pour X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, tous réels c et d positifs :

$$P(X \leqslant c) = 1 - e^{-\lambda c}$$
$$P(X > c) = e^{-\lambda c}$$
$$P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$$

Proposition 13. *Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.*

L'espérance mathématique de X est le réel

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

Remarque 14. Lorsque X modélise la durée de vie d'un composant, $E(X)$ est la « durée de vie moyenne » du composant.

Proposition 14. *Propriété d'absence de mémoire*
Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

Pour tous réels strictement positifs t et h :

$$P_{(X\geqslant t)}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$$

Remarque 15. On dit que la loi exponentielle est sans vieillissement ou avec absence de mémoire.

Exemple 13. Soit un appareil dont la durée de vie en année est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,1$.

On a alors $P_{(X\geqslant 3)}(X \geqslant 5) = P_{(X\geqslant 3)}(X \geqslant 3+2) = P(X \geqslant 2)$

cela signifie que si l'appareil a déjà fonctionné pendant plus de 3 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore 2 ans de plus (soit plus de 5 ans en tout) est la même que la probabilité (sans condition) de fonctionner pendant plus de 2 ans.

4 Intégrale d'une fonction continue

4.1 Définition

Définition 9. Extension de la définition de l'intégrale
Soit f une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle I, a et b désignent deux réels de I.

L'intégrale de a à b de f est le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f.

On note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$

Exemple 14. $\displaystyle\int_{-2}^{1} e^{2u} - u - 2\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}e^{2u} - \frac{u^2}{2} - 2u\right]_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} - 2\right) - \left(\frac{1}{2}e^{-4} - 2 + 4\right) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{-4} - 2 = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^{-4} - \frac{9}{2} \simeq -0,815$

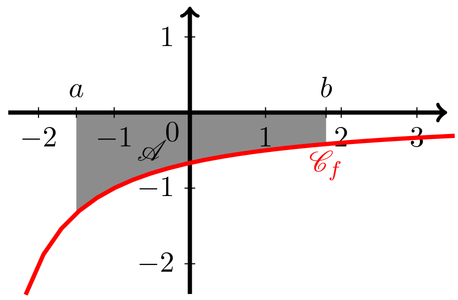
4.2 Calcul d'aires

4.2.1 Intégrales et calculs d'aires

Une intégrale peut être interprétée en termes d'aire pour les fonctions de signe quelconque.

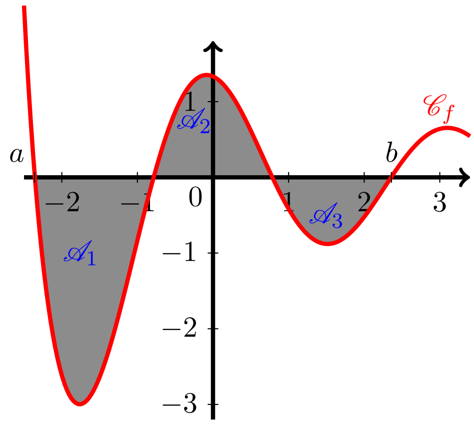
Si f est négative sur $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathscr{A}$$



Si f est de signe quelconque sur $[a;b]$:

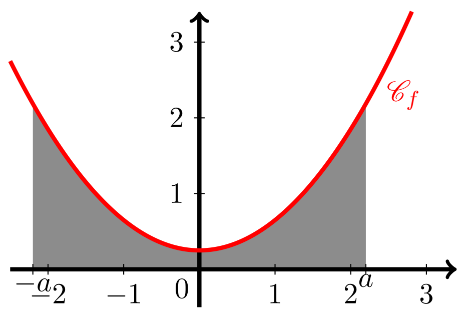
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 - \mathscr{A}_3$$



On en déduit des propriétés sur des fonctions particulières.

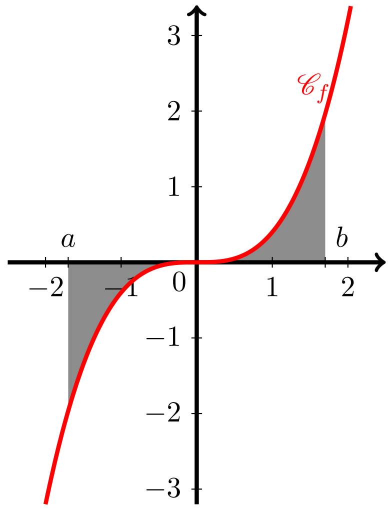
Si f est paire sur $[-a;a]$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$$



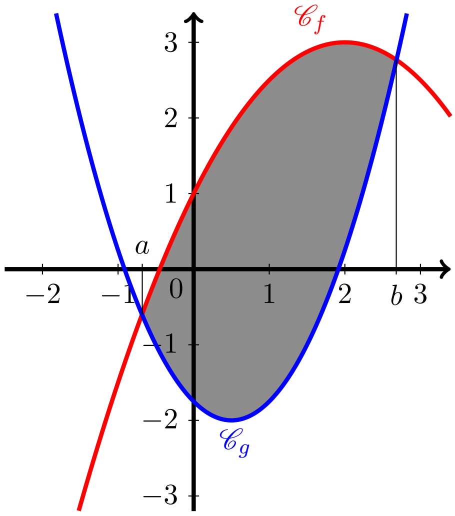
Si f est impaire sur $[-a;a]$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$



Si, pour tout réel $x \in [a;b]$, $g(x) \leqslant f(x)$
l'aire du domaine délimité par les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$ et les deux courbes est tel que

$$\mathscr{A} = \int_a^b f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$



4.2.2 Méthode des rectangles

En utilisant les différentes propriétés vues précédemment, tout calcul d'intégrale peut être transformé pour qu'il suffise de calculer l'intégrale d'une fonction continue positive.
Comment estimer les intégrales de fonction continues et positives dont on ne connait pas de primitive ?

Proposition 15. *Méthode des rectangles inférieurs et supérieurs*
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.

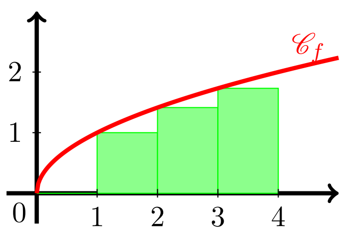
On partage l'intervalle $[a;b]$ en n intervalles de même amplitude et on construit des rectangle « inférieurs » et « supérieurs ».

On note $\mathscr{A}_i$ (respectivement $\mathscr{A}_s$) l'aire totale des rectangles inférieurs (respectivement supérieurs).

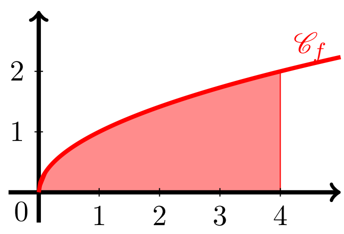
Alors $\mathscr{A}_i \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \mathscr{A}_s$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{A}_i = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathscr{A}_s = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Exemple 15. Pour $n = 4$

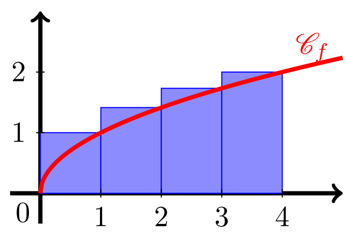
$\mathscr{A}_i$



$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$



$\mathscr{A}_s$



Vous pouvez observer cet exemple avec n variable sur le fichier geogebra.

Remarque 16. Plus la valeur de n augmente plus l'encadrement de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ aura une amplitude petite.

Remarque 17. Le symbole $\int$ utilisé ressemble à un « S ». Il vient de la somme des aires de tous les rectangles.

Remarque 18. On peut aussi utiliser d'autres méthodes pour estimer l'aire sous la courbe, notamment des trapèzes ; voir les propositions faites lors de l'étude du volcan Aso.